УДК 517.92

Г. В. Кочешков

ВЫДЕЛЕНИЕ ОБЛАСТИ РАВНОМЕРНОЙ ЭЛЛИПТИЧНОСТИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДВУХ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОСОБЕННОСТЯМИ В ОДНОЙ МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

В области $\Omega = \{(r,\ z) : 0 < r < R_2,\ 0 < z < L\}$ рассматривается система уравнений

$$-\operatorname{div}\left(\frac{\eta_t}{\sigma}\ \nabla k\right) + (\rho\vec{V},\ \nabla k) + C_D \rho W^{1/2} k = \eta_t A,$$

$$-\operatorname{div}\left(\frac{\eta_t}{\sigma}\ \nabla W\right) + (\rho\vec{V},\ \nabla W) + C_2 \rho W^{3/2} A + \eta_t B,$$

определяющая турбулентную вязкость $\eta_t = \rho k W^{-1/2}$ движущегося в Ω потока вязкой сжимаемой жидкости.

Вводя последовательные приближения таким образом, чтобы для произвольного фиксированного номера приближения n уравнения были линейны и независимы друг от друга, выделяется область изменения данных задачи $A_\pm$, $B_\pm$, $(k|_{\partial\Omega_1})_\pm$, $(W|_{\partial\Omega_1})_\pm$, C_2, C_3, C_D, для которой оценки решений не зависят от номера приближения, и система остается равномерно эллиптической при $n \to \infty$.

При турбулентном движении потока вязкой сжимаемой жидкости эффективная вязкость η_{eff} может быть представлена [1] в виде

$$\eta_{eff} = \eta_e + \eta_t.$$

Здесь η_e — молекулярная вязкость (const); η_t — турбулентная добавка к вязкости или турбулентная вязкость, которая в модели ЭШП [4] рассчитывается в соответствии с двухпараметрической моделью Сполдинга для турбулентного движения

$$\eta_t = \rho k W^{-1/2}, \tag{1}$$

где ρ — плотность; k — удельная кинетическая энергия турбулентности; W — турбулентная «характеристика». Величины k и W определяются уравнениями

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\Gamma_k \frac{\partial k}{\partial r}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\Gamma_k \frac{\partial k}{\partial z}\right) + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(k\,\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) - \frac{\partial}{\partial r}\left(k\,\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)\right] = F_k, \tag{2}$$

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\Gamma_W \frac{\partial W}{\partial r}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\Gamma_W \frac{\partial W}{\partial z}\right) + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(W\,\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) - \frac{\partial}{\partial r}\left(W\,\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)\right] = F_W, \tag{3}$$

$$(r,\ z) \in \Omega = \{(r,\ z) : 0 < r < R_2,\ 0 < z < L\}.$$

Коэффициенты Γ_k и Γ_W связаны с турбулентной вязкостью соотношениями

$$\sigma_k = \frac{\eta_t}{\Gamma_k},\quad \sigma_W = \frac{\eta_t}{\Gamma_W} \tag{4}$$

где σ_k и σ_W — турбулентные числа Прандтля — Шмидта. Правые части уравнений определены следующим образом:

$$F_k = G - C_D \rho k W^{1/2}, \tag{5}$$

$$F_W = C_1 \eta_t \left[\left(\frac{\partial \omega}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial z}\right)^2\right] - C_2 \rho W^{3/2} + C_3 \frac{W}{k} G, \tag{6}$$

$$G = 2\eta_t \left[\left(\frac{\partial V_r}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{V_r}{r}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_r}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial r}\right)^2\right]. \tag{7}$$

 ISSN 0236 0497. Нелинейн. граничн. задачи. 1992. Вып. 4.

Граничные условия для k и W таковы:

$$\left.\frac{\partial k}{\partial r}\right|_{r=0}=0;\quad \left.\frac{\partial k}{\partial z}\right|_{\substack{z=L\\ R_1<r<R_2}}=0;\quad \left.\frac{\partial W}{\partial r}\right|_{r=0}=0;\quad \left.\frac{\partial W}{\partial r}\right|_{\substack{z=L\\ R_1<r<R_2}}=0;\qquad (8)$$

для остальной части границы (обозначим ее через $(\partial\Omega)_1$)

$$k=\frac{\tau_W}{\rho\sqrt{C_D}};\quad W=\frac{\tau_W}{0{,}17C_D\rho h^2}.$$

Здесь τ_W — напряжение сдвига у стенки, рассчитываемое по формуле

$$\tau_W=0{,}0225\rho v^{7/4}\left(\frac{\eta_l}{\rho h}\right)^{1/4},\qquad (9)$$

где v — скорость в тангенциальном направлении на расстоянии h от стенки, определяемая известной функцией тока ψ:

$$\vec{V}=\{V_r;\ V_z\}=\left\{-\frac{1}{r\rho}\frac{\partial\psi}{\partial z};\ \frac{1}{r\rho}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right\}.$$

Постоянные C_1, C_2, C_3, C_D равны соответственно 3,5; 0,17; 1,04; 0,09; $\sigma_k = \sigma_W = 0{,}9$.

Следует заметить, что на твердой стенке выполняется соотношение

$$\alpha=\frac{k}{W}=0{,}17\sqrt{C_D}h^2=\mathrm{const}.\qquad (10)$$

С учетом соотношений (1), (4) — (7) уравнения (2), (3) запишем в виде

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\rho k}{\sigma W^{1/2}}\frac{\partial k}{\partial r}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho k}{\sigma W^{1/2}}\frac{\partial k}{\partial z}\right)+$$
$$+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)-\frac{\partial}{\partial r}\left(k\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\right]+C_D\rho W^{1/2}k=\frac{\rho k}{W^{1/2}}A,\qquad (11)$$

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\rho k}{\sigma W^{1/2}}\frac{\partial W}{\partial r}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho k}{\sigma W^{1/2}}\frac{\partial W}{\partial z}\right)+$$
$$+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(W\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)-\frac{\partial}{\partial r}\left(W\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\right]+C_2\rho W^{3/2}=C_3\rho W^{1/2}A+\rho\frac{k}{W^{1/2}}B,\qquad (12)$$

где

$$A=2\left[\left(\frac{\partial V_r}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{V_r}{r}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_r}{\partial z}+\frac{\partial V_z}{\partial r}\right)^2\right],\qquad (13)$$

$$B=C_1\left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)^2\right],\qquad (14)$$

а ω — заданная функция от r и z.

Таким образом, будем изучать систему уравнений (11), (12) с условиями

$$\left.\frac{\partial k}{\partial r}\right|_{r=0}=0,\ \left.\frac{\partial k}{\partial z}\right|_{\substack{z=L\\ R_1<r<R_2}}=0,\ k|_{(\partial\Omega)_1}=\alpha W_0(s),\qquad (15)$$

$$\left.\frac{\partial W}{\partial r}\right|_{r=0}=0,\ \left.\frac{\partial W}{\partial z}\right|_{\substack{z=L\\ R_1<r<R_2}}=0,\ W|_{(\partial\Omega)_1}=W_0(s),\quad s\in(\partial\Omega)_1.\qquad (16)$$

Будем считать, что

$$\begin{gathered}0<A_-\leqslant A\leqslant A_+<\infty\quad\forall(r,z)\in\bar{\Omega},\\ 0<B_-\leqslant B\leqslant B_+<\infty\quad\forall(r,z)\in\bar{\Omega},\\ 0<k_-\leqslant k|_{(\partial\Omega)_1}\leqslant k_+<\infty,\\ 0<W_-\leqslant W|_{(\partial\Omega)_1}\leqslant W_+<\infty,\end{gathered}\qquad (17)$$

причем в силу (10) $k_\pm=\alpha W_\pm$.

Для рассматриваемой системы уравнений (11), (12) введем последовательные приближения вида

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\rho k_{n-1}}{\sigma W_{n-1}^{1/2}}\frac{\partial k_n}{\partial r}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho k_{n-1}}{\sigma W_{n-1}^{1/2}}\frac{\partial k_n}{\partial z}\right)+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(k_n\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial}{\partial r}\left(k_n\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\right]+C_D\rho W_{n-1}^{1/2}k_n=\rho\frac{k_{n-1}}{W_{n-1}^{1/2}}A,\quad n=1,\ 2,\ \ldots, \tag{18}$$

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\rho k_{n-1}}{\sigma W_{n-1}^{1/2}}\frac{\partial W_n}{\partial r}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho k_{n-1}}{\sigma W_{n-1}^{1/2}}\frac{\partial W_n}{\partial z}\right)+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(W_n\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial}{\partial r}\left(W_n\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\right]+C_2\rho W_{n-1}^{1/2}W_n=C_3\rho W_{n-1}^{1/2}A+\rho\frac{k_{n-1}}{W_{n-1}^{1/2}}B,\quad n=1,\ 2,\ \ldots, \tag{19}$$

при этом для любого фиксированного n получаем независимые линейные уравнения относительно k_n и W_n. Отношение $\frac{k_{n-1}}{W_{n-1}}$ обозначим через u_{n-1}.

Лемма 1. Пусть для заданных A, B, α, $W_\pm$ и для $k_{n-1}>0$, $W_{n-1}>0$ существуют решения задач (18), (15) и (19), (16), такие, что

$$k_n(r,z),\ W_n(r,z)\in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega}\setminus(\partial\Omega)_1)\cap C(\Omega\cup(\partial\Omega)_1). \tag{20}$$

Тогда справедливы оценки

$$\min\left\{\alpha W_-,\ \min_\Omega\frac{A}{C_D}u_{n-1}\right\}\leqslant k_n\leqslant\max\left\{\alpha W_+,\ \max_\Omega\frac{A}{C_D}u_{n-1}\right\}, \tag{21}$$

$$\min\left\{W_-,\ \min_\Omega\left(\frac{AC_3}{C_2}+\frac{B}{C_2}u_{n-1}\right)\right\}\leqslant W_n\leqslant\max\left\{W_+,\ \max_\Omega\left(\frac{AC_3}{C_2}+\frac{B}{C_2}u_{n-1}\right)\right\}. \tag{22}$$

В силу оценок (21), (22) функция $U_n=\frac{k_n}{W_n}$ имеет положительные конечные значения для любых $(r,z)\in\overline{\Omega}$, так что уравнения (18), (19) равномерно эллиптичны для любого фиксированного n, как только $u_0>0$.

Лемма 2. Для функции $u_n=\frac{k_n}{W_n}$ справедлива оценка

$$\min\left\{\alpha,\ \min_\Omega\frac{Au_{n-1}+(C_2-C_D)k_n}{AC_3+Bu_{n-1}}\right\}\leqslant u_n\leqslant\max\left\{\alpha,\ \max_\Omega\frac{Au_{n-1}+(C_2-C_D)k_n}{AC_3+Bu_{n-1}}\right\}. \tag{23}$$

Записывая уравнение (18) в виде

$$-\operatorname{div}\left(\frac{\rho}{\sigma}\frac{k_{n-1}}{W_{n-1}^{1/2}}\nabla k_n\right)+(\rho\vec{V},\nabla k_n)+C_D\rho W_{n-1}^{1/2}k_n=\rho\frac{k_{n-1}}{W_{n-1}^{1/2}}A$$

и учитывая, что $k_n=u_nW_n$, $\nabla k_n=W_n\nabla u_n+u_n\nabla W_n$, с использованием (19) получаем уравнение для u_n:

$$-\operatorname{div}\left(\frac{\rho}{\sigma}\frac{k_{n-1}}{W_{n-1}^{1/2}}W_n\nabla u_n\right)+W_n(\rho\vec{V},\nabla u_n)-\frac{\rho}{\sigma}\frac{k_{n-1}}{W_{n-1}^{1/2}}(\nabla W_n,\nabla u_n)+$$

$$+u_n\rho W_{n-1}^{1/2}(C_3A+Bu_{n-1})=\rho W_{n-1}^{1/2}[Au_{n-1}+(C_2-C_D)k_n]$$

с условиями

$$\left.\frac{\partial u_n}{\partial r}\right|_{r=0}=0,\quad\left.\frac{\partial u_n}{\partial z}\right|_{\substack{z=L\\R_1<r<R_2}}=0,\quad u_n|_{(\partial\Omega)_1}=\alpha,$$

откуда, как нетрудно видеть, вытекают указанные в лемме 2 соотношения.

Оценка для u_n может быть записана в другом виде, а именно: преобразуя в (18) слагаемое $C_D\rho W_{n-1}^{1/2}k_n$ к виду $C_D\rho W_{n-1}^{1/2}W_nu_n$, получаем для u_n

уравнение

$$-\operatorname{div}\left(\frac{\rho}{\sigma}\frac{k_{n-1}}{W_{n-1}^{1/2}}W_n\nabla u_n\right)+W_n(\rho\vec{V},\nabla u_n)-\frac{\rho}{\sigma}\frac{k_{n-1}}{W_{n-1}^{1/2}}(\nabla W_n,\nabla u_n)+$$

$$+u_n\rho W_{n-1}^{1/2}[C_3A+Bu_{n-1}-(C_2-C_D)W_n]=\rho W_{n-1}^{1/2}Au_{n-1}. \tag{24}$$

Считая $C_3A+Bu_{n-1}-(C_2-C_D)W_n>0\ \forall(r,\ z)\in\Omega$, приходим к соотношению

$$\min\left\{\alpha,\ \min_{\Omega}\frac{Au_{n-1}}{C_3A+Bu_{n-1}-(C_2-C_D)W_n}\right\}\leqslant u_n\leqslant$$

$$\leqslant\max\left\{\alpha,\ \max_{\Omega}\frac{Au_{n-1}}{C_3A+Bu_{n-1}-(C_2-C_D)W_n}\right\}. \tag{25}$$

Разделив (24) на C_2 и усилив его, получим, что оценка (25) справедлива при

$$\frac{\max\limits_{\bar\Omega}W_n}{\min\limits_{\bar\Omega}W_n}<\frac{C_2}{C_2-C_D}. \tag{26}$$

Рассмотрим вопрос сохранения оценок при изменении номера приближения, т. е. выделим область изменения данных задачи $A_\pm$, $B_\pm$, $W_\pm$, α такую, чтобы оценки не зависели от номера приближения n.

Обозначим $\min\limits_{\Omega}\frac{A}{C_D}u_{n-1}=m_n$, $\max\limits_{\Omega}\frac{A}{C_D}u_{n-1}=M_n$.

Предположим, что для $n=n_0$

$$m_{n_0}>\alpha W_-,\ M_{n_0}<\alpha W_+, \tag{27}$$

тогда $\alpha W_-\leqslant k_n\leqslant\alpha W_+$.

Введем функцию $\tilde B=\frac{B}{A}$. Очевидно, что $\tilde B_-\leqslant\tilde B\leqslant\tilde B_+$. Тогда

$$W_n\leqslant\max\left\{W_+,\ \max_{\Omega}\left(\frac{AC_3}{C_2}+\frac{B}{A}\frac{C_D}{C_2}\frac{A}{C_D}u_{n-1}\right)\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\max\left\{W_+,\ \frac{A_+C_3}{C_2}+\tilde B_+\frac{C_D}{C_2}M_n\right\}\leqslant\max\left\{W_+,\ \frac{A_+C_3}{C_2}+\tilde B_+\alpha W_+\right\}, \tag{28}$$

$$W_n\geqslant\min\left\{W_-,\ \min_{\Omega}\left(\frac{AC_3}{C_2}+\frac{B}{A}\frac{C_D}{C_2}\frac{A}{C_D}u_{n-1}\right)\right\}\geqslant$$

$$\geqslant\min\left\{W_-,\ \frac{A_-C_3}{C_2}+\tilde B_-\frac{C_D}{C_2}\alpha W_-\right\} \tag{29}$$

в силу предположения (27).

Пусть $W_+>\frac{A_+C_3}{C_2}+\tilde B_+\frac{C_D}{C_2}\alpha W_+$,

$$W_-<\frac{A_-C_3}{C_2}+\hat B_-\frac{C_D}{C_2}\alpha W_-. \tag{30}$$

Тогда $W_-\leqslant W_n\leqslant W_+$, причем из (26) следует

$$\frac{W_+}{W_-}<\frac{C_2}{C_2-C_D}. \tag{31}$$

Оценка для u_n сверху примет вид

$$u_n\leqslant\max\left\{\alpha,\ \max_{\Omega}\frac{C_D\frac{A}{C_D}u_{n-1}}{C_3A+\frac{B}{A}C_D\frac{A}{C_D}u_{n-1}-(C_2-C_D)W_n}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\max\left\{\alpha,\ \frac{C_D\alpha W_+}{C_3A_-+B_-C_D\alpha W_--(C_2-C_D)W_+}\right\}. \tag{32}$$

Оценка для u_n снизу:

$$u_n \geqslant \min \left\{ \alpha, \min_{\Omega} \frac{C_D \frac{A}{C_D} u_{n-1} + (C_2 - C_D) k_n}{C_3 A + \frac{B}{A} C_D \frac{A}{C_D} u_{n-1}} \right\} \geqslant \min \left\{ \alpha, \frac{C_2 \alpha W_-}{C_3 A_+ + \tilde{B}_+ C_D \alpha W_+} \right\}. \tag{33}$$

Потребуем, чтобы условия (27) имели место для $n = n_0 + 1$, т. е.

$$M_{n_0+1} \leqslant \frac{A_+}{C_D} \max u_{n_0} \leqslant \frac{A_+}{C_D} \max \left\{ \alpha, \frac{C_D \alpha W_+}{C_3 A_- + C_D \tilde{B}_- \alpha W_- - (C_2 - C_D) W_+} \right\} < \alpha W_+,$$

$$m_{n_0+1} \geqslant \frac{A_-}{C_D} \min u_{n_0} \geqslant \frac{A_-}{C_D} \min \left\{ \alpha, \frac{C_2 \alpha W_-}{C_3 A_+ + \tilde{B}_+ C_D \alpha W_+} \right\} > \alpha W_-,$$

откуда

$$\frac{A_+}{C_D} < W_+,$$

$$\frac{A_+}{C_D} \frac{C_D}{C_2} < \frac{C_3 A_-}{C_2} + \hat{B}_- \frac{C_D}{C_2} \alpha W_- - \frac{C_2 - C_D}{C_2} W_+,$$

$$\frac{A_-}{C_D} > W_-,$$

$$\frac{A_-}{C_D} > \frac{C_3 A_+}{C_2} + \tilde{B}_+ \frac{C_D}{C_2} \alpha W_+.$$

Таким образом, имеют место оценки

$$\begin{gathered} \alpha W_- \leqslant k_n \leqslant \alpha W_+, \\ W_- \leqslant W_n \leqslant W_+, \end{gathered} \tag{34}$$

если данные задачи удовлетворяют цепочке неравенств

$$W_- < \frac{C_3}{C_2} A_- + \tilde{B}_- \frac{C_D}{C_2} \alpha W_- < \frac{C_3 A_+}{C_2} + \tilde{B}_+ \frac{C_D}{C_2} \alpha W_+ < \frac{A_-}{C_D} <$$

$$< \frac{A_+}{C_3} < \frac{C_2}{C_D} \left(\frac{C_3}{C_2} A_- + \ddot{B}_- \frac{C_D}{C_2} \alpha W_- \right) - \frac{C_2 - C_D}{C_D} W_+ < W_+. \tag{35}$$

Рассматривая поочередно комбинации неравенств, входящих в (35), определяем верхнюю и нижнюю границы изменения одних искомых параметров через другие. Учитывая, что при этом нижняя граница должна иметь значение меньше верхней, получаем дополнительную систему неравенств.

Отсюда следует, что постоянные C_2, C_3, C_D должны удовлетворять соотношениям

$$C_D < C_2 < 1 < C_3, \quad \frac{C_2}{2} < C_3 C_D < C_2. \tag{36}$$

Далее

$$\frac{C_2 (2 C_3 C_D - C_2)}{C_3^2 C_D} W_- < A_- < \frac{C_2}{C_3} W_-; \tag{37}$$

$$\frac{A_+}{A_-} < \frac{C_2}{C_3 C_D}; \tag{38}$$

$$\frac{W_+}{W_-} < \frac{C_2}{C_3 (C_2 - C_D)} \left[(C_3 - 1) + \left(\frac{C_2}{C_3 C_D} - 1 \right) \right]; \tag{39}$$

$$0 < \alpha \hat{B}_- < \frac{C_2}{C_3 C_D} \frac{C_2 - C_3 C_D}{C_D}; \tag{40}$$

$$\alpha \hat{B}_- < \alpha \hat{B}_+ < \frac{C_2}{C_D}. \tag{41}$$

Выбирая данные задачи, удовлетворяющие (36) — (41), для функций k_n и W_n имеем оценки (34), не зависящие от n. Наличие равномерных оценок позволяет совершить предельный переход по n при изучении обобщенных решений рассматриваемой системы уравнений (11), (12).

Теорема. Пусть данные задачи принадлежат области их изменения, определяемой соотношениями (36) — (41). Тогда задача (11), (12), (15) — (17) равномерно эллиптична, и для ее решения справедливы оценки

$$\alpha W_- \leqslant k(r, z) \leqslant \alpha W_+,$$

$$W_- \leqslant W(r, z) \leqslant W_+ \quad \forall (r, z) \in \overline{\Omega}.$$

Замечание. Выбирая max и min в (28), (29) иначе, чем это указано в соотношениях (30), можно выделить другие области изменения данных задачи, обеспечивающие равномерную эллиптичность исходной системы уравнений.

1. *Численные* методы исследования течений вязкой жидкости / А. Д. Госмен, В. М. Пан, А. К. Ранчел и др.— М. : Мир, 1972.— 324 с.
2. *Данилюк И. И., Кочешков Г. В.* О существовании и единственности слабого решения в модели одного теплофизического процесса // Функциональные и численные методы математической физики.— Киев : Наук. думка, 1988.— С. 66—70.
3. *Кочешков Г. В.* Корректность математической модели одного магнито-гидродинамического теплофизического процесса // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1988.— № 2.— С. 16—19.
4. *Крейенберг И., Швердтфегер К.* Скорости потоков и температурное поле в шлаковой ванне при ЭШП // Электрошлаковый переплав.— 1983.— Вып. 7.— С. 121—131.
5. *Ладыжевская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.— М. : Наука, 1973.— 573 с.

Ин-т прикл. математики и механики
АН Украины, Донецк

Получено 28.11.89